

AutorIn:
Timo Münzig



Mathematik
Informatik

Empfohlen für
Klassen 11–13

Fraktale in der Pflanzen- welt

Wenn Mathematik und Natur
sich vereinen

Klett MEX



Vorwort

Im in dieser Handreichung beschriebenen Unterrichtsverlauf zu fraktaler Geometrie entdecken die Schüler:innen, wie aus einfachen mathematischen Regeln durch Iteration komplexe, selbstähnliche und ästhetisch ansprechende Strukturen entstehen. Ausgehend vom Staunen über fraktale Naturformen wird Mathematik als lebendiger Prozess erfahrbar, der Wahrnehmung, Naturverständnis und mathematisches Denken miteinander verbindet. Die Lernenden untersuchen rekursive Konstruktionsvorschriften, beschreiben Wachstum und Grenzverhalten und gewinnen Einblicke in Selbstähnlichkeit und fraktale Dimension – mit dem Ziel, die Schönheit mathematischer Strukturen zu erkennen, zu modellieren und zu reflektieren.

Unterschrift

Name

Bezeichnung Lorem Ipsum

Fraktale in der Pflanzenwelt

Wenn Mathematik und Natur sich vereinen

Klassen: empfohlen für Klassen 11–13

Zeitbedarf: 4 x 45 Minuten plus nach Belieben Projektarbeit

Fächer: Mathematik, Informatik

LEITFRAGEN

- * **Was verändert sich in unserer Wahrnehmung von Natur, wenn wir erkennen, dass komplexe, ästhetisch ansprechende Strukturen aus einfachen Regeln entstehen? Und wie beeinflusst dieses Staunen unser Mathematik- und Naturverständnis?**
- * **Wie kann die Schönheit fraktaler Naturformen mathematisch beschrieben werden und die Mathematik erlebbar machen?**
- * **Welche mathematischen Regeln liegen der fraktalen Geometrie zugrunde?**

BEZUG ZUM LEHRPLAN

Mathematik: Kompetenzbereiche Prozesse und Strukturen erkennen, funktionales Denken, Argumentieren sowie Darstellen und Kommunizieren; Beschreiben von rekursiven Konstruktionsvorschriften, Untersuchen von Wachstumsprozessen mithilfe geometrischer Folgen, Interpretieren von Grenzverhalten, Selbstähnlichkeit und Dimension

BEZÜGE ZU WEITEREN FÄCHERN

Informatik: Algorithmisierung, Iteration und Regelmäßigkeit, digitale Erzeugung von Fraktalen als wiederholbare Prozesse

Biologie: fraktale Naturformen (z. B. Pflanzenstrukturen), Struktur-Funktions-Zusammenhänge, Modellbildung und die Rolle mathematischer Prinzipien in biologischen Systemen

KOMPETENZEN

- * **Mathematische Kompetenzen:** Die Schüler:innen beschreiben und nutzen rekursive Konstruktionsvorschriften zur Erzeugung fraktaler Figuren (z. B. Koch-Kurve, Sierpinski-Dreieck), erkennen Selbstähnlichkeit als zentrales Strukturmerkmal von Fraktalen, untersuchen Wachstumsprozesse von Umfang und Fläche mithilfe geometrischer Folgen und stellen diese tabellarisch sowie grafisch dar, deuten das Grenzverhalten iterativer Prozesse qualitativ (unendlicher Umfang bei endlicher Fläche), wenden eine einfache Formel zur fraktalen Dimension an und interpretieren die Ergebnisse im Kontext klassischer Dimensionen, modellieren reale Strukturen exemplarisch mithilfe fraktaler Geometrie.
- * **Prozessbezogene Kompetenzen:** Die Schüler:innen strukturieren mathematische Fragestellungen und entwickeln Lösungsstrategien, formulieren Konstruktionsregeln und begründen Zusammenhänge, nutzen Darstellungsformen wie Zeichnungen, Tabellen, Diagramme und ggf. digitale Werkzeuge, präsentieren Ergebnisse adressatengerecht und reflektieren Vorgehensweisen.
- * **Überfachliche und fachübergreifende Kompetenzen:** Die Schüler:innen erkennen fraktale Strukturen als algorithmische Prozesse (Bezug zur Informatik: Iteration, Regelmäßigkeit), stellen Zusammenhänge zwischen mathematischen Modellen und biologischen Strukturen her, entwickeln systemisches Denken und erleben Mathematik als kreatives und ästhetisches Erkenntnisinstrument.

ZUR SACHE

Fraktale – wenn sich Natur und Mathematik zu ästhetischer Schönheit verbinden



In der Natur begegnen uns vielfältige, komplexe und ästhetisch wirkungsvolle Strukturen – etwa in Pflanzenformen, Küstenlinien oder Wolkenmustern –, deren scheinbare Unordnung bei genauerem Hinsehen auf einfachen, wiederkehrenden Prinzipien beruht. Fraktale machen diese verborgene Ordnung sichtbar und zeigen, wie mathematische Eleganz und natürliche Ästhetik ineinandergreifen: Aus iterativen Regeln entstehen selbstähnliche Gebilde mit hoher ästhetischer Qualität. Unter Fraktalen versteht man geometrische Strukturen, die sich auf verschiedenen Maßstabsebenen ähneln und deren Formen durch wiederholte Prozesse wachsen. Sie verdeutlichen, dass visuelle Komplexität aus formaler Einfachheit hervorgeht, und bilden so eine eindrucksvolle Verbindung zwischen Natur, Mathematik und menschlichem Staunen.

BEDEUTUNG IN NATUR UND TECHNIK

Fraktale Muster finden sich in vielen natürlichen und technischen Kontexten: Die verzweigte Struktur von Farnen und Bäumen, die feinen Verästelungen von Blutgefäßen oder Bronchien sowie die gezackten Formen von Küstenlinien folgen selbstähnlichen Wachstumsprinzipien. Auch Wolkenformationen und Gebirgslandschaften zeigen diese charakteristische Mischung aus Regelmäßigkeit und scheinbarer Unordnung. In der Technik werden fraktale Strukturen gezielt genutzt, etwa bei



Beispiele für Fraktale: Baumäste

© Mads Sabroe

Antennen, deren selbstähnliche Geometrie eine kompakte Bauweise bei hoher Empfangsleistung ermöglicht, oder in der Computergrafik, wo Landschaften realistisch modelliert werden. Solche Anwendungen gehen auf mathematische Grundlagen zurück, die unter anderem durch Benoît Mandelbrot geprägt wurden, und verdeutlichen, wie fraktale Geometrie als verbindendes Konzept zwischen Naturbeobachtung, mathematischer Modellierung und technischer Innovation wirkt.



Beispiele für Fraktale: Romanesco

© Ivar Leidus



ZUR SACHE

SCHON GEWUSST?

Benoît Mandelbrot galt mit seinen Ideen zur fraktalen Geometrie lange als wissenschaftlicher Außenseiter: Seine interdisziplinäre Arbeitsweise passte nicht in die etablierten Strukturen der Mathematik, weshalb seine Ansätze zunächst kaum Beachtung fanden und teilweise sogar als randständig abgetan wurden. Erst Jahrzehnte später, unterstützt durch computer-gestützte Visualisierungen, wurde die Tragweite seiner Erkenntnisse sichtbar. Heute wird Mandelbrot als Pionier gefeiert, der das Verständnis komplexer Formen grundlegend verändert hat – ein Beispiel dafür, wie innovative Ideen zunächst ausgegrenzt werden können, bevor sie die Wissenschaft nachhaltig prägen.

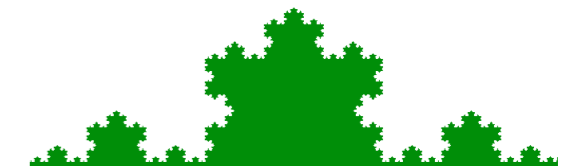
SELBSTÄHNLICHKEIT ALS ZENTRALES STRUKTURPRINZIP VON FRAKTALEN

Selbstähnlichkeit bedeutet, dass sich eine Struktur auf verschiedenen Maßstabsebenen immer wieder in ähnlicher Form zeigt: Jeder Teil gleicht – verkleinert oder vergrößert – dem Ganzen. Dieses Prinzip ist charakteristisch für Fraktale und unterscheidet sie von klassischen geometrischen Figuren. Während ein Kreis oder ein Quadrat bei Vergrößerung keine neuen Details offenbart, erscheinen bei fraktalen Objekten mit jedem Zoom weitere, ähnlich aufgebaute Strukturen.

Dabei unterscheidet man zwei grundlegende Formen: exakte und statistische Selbstähnlichkeit. Diese Unterscheidung ist didaktisch besonders wertvoll, da sie den Übergang von idealisierten mathematischen Modellen zur realen Natur verdeutlicht.

Bei exakter Selbstähnlichkeit besteht das Objekt aus mehreren identischen verkleinerten Kopien seiner selbst. Jeder Abschnitt der Figur ist – bis auf Maßstab und Lage – genau gleich aufgebaut wie das Ganze.

Die Koch-Kurve – eine von dem schwedischen Mathematiker Helge von Koch Anfang des 20. Jahrhunderts vorgestellte fraktale Kurve – ist ein klassisches Beispiel: Jede Strecke wird durch vier neue Strecken ersetzt, die jeweils ein Drittel so lang sind. Betrachtet man einen beliebigen Ausschnitt der Kurve und vergrößert ihn, erscheint wieder dieselbe Form. Diese perfekte Wiederholung entsteht durch eine strikt festgelegte Konstruktionsregel und ist typisch für mathematisch erzeugte Fraktale.



Koch-Kurve

In der Natur begegnet uns dagegen meist statistische Selbstähnlichkeit. Hier ähneln sich die Teilstrukturen nur annähernd, nicht exakt. Ein Farn zeigt zwar auf verschiedenen Ebenen ähnliche Verzweigungsmuster – jedes kleine Fiederblatt erinnert an den gesamten Wedel –, doch keine Kopie ist vollkommen identisch. Kleine Abweichungen entstehen durch biologische Wachstumsprozesse, Umweltbedingungen und Zufallseinflüsse.

DIDAKTISCHER HINWEIS

Gerade diese Gegenüberstellung stärkt das Verständnis dafür, wie einfache Regeln sowohl ideale geometrische Figuren als auch komplexe biologische Formen hervorbringen können. schaft nachhaltig prägen.



ZUR SACHE

Mathematische Grundlagen



Fraktale sind geometrische Objekte, die durch Iteration einfacher Regeln entstehen. Ausgangspunkt ist meist eine einfache Grundfigur (z. B. eine Strecke oder ein Dreieck). Auf diese wird immer wieder dieselbe Transformationsvorschrift angewendet. Dieser rekursive Prozess erzeugt Strukturen, die mit jedem Schritt komplexer werden. Formal lässt sich das als Folge von Iterationen beschreiben:

$$F_{n+1} = T(F_n)$$

F_n = Figur nach dem n -ten Schritt
 T = Konstruktionsregel

Zentral ist dabei die Idee der Selbstähnlichkeit: Jeder Teil des Fraktals ähnelt dem Ganzen, nur in verkleinertem Maßstab. Diese Eigenschaft unterscheidet Fraktale von klassischer euklidischer Geometrie.

WACHSTUM VON LÄNGE UND FLÄCHE

Viele Fraktale zeigen ein paradox wirkendes Verhalten: Der Umfang wächst unbegrenzt, während die Fläche endlich bleibt. Beispielhaft lässt sich dies an Linienfraktalen zeigen. Wird in jedem Iterationsschritt jede Strecke durch N neue Strecken ersetzt, die jeweils um den Faktor r verkleinert sind, so gilt für die Gesamtlänge nach n Iterationen:

$$U_n = U_0 \cdot (N \cdot r)^n$$

U_0 = Anfangsumfang (in Iteration 0),
 N = Anzahl der neuen Teilstrecken pro ursprünglicher Strecke,
 r = Skalierungsfaktor der einzelnen Teilstrecken ($0 < r < 1$),
 n = Anzahl der Iterationsschritte

Ist $N \cdot r > 1$, wächst der Umfang exponentiell und strebt gegen unendlich. Bei Flächenfraktalen (z. B. beim Entfernen von Teilflächen) entsteht dagegen häufig eine geometrische Reihe deren Grenzwert endlich ist. So lernen Schüler:innen, dass iterative Prozesse zu überraschenden Grenzphänomenen führen können.

FRAKTALE DIMENSION

Ein weiteres zentrales Konzept ist die fraktale Dimension. Während klassische geometrische Figuren ganzzahlige Dimensionen besitzen (Punkt: 0, Linie: 1, Fläche: 2), liegen Fraktale häufig dazwischen. Für exakt selbstähnliche mathematische Fraktale lässt sich diese Dimension eindeutig berechnen mit

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}$$

N = Anzahl der verkleinerten Kopien
 r = Skalierungsfaktor



ZUR SACHE

Bei der Koch-Kurve gilt beispielsweise $N=4$ und $r = \frac{1}{3}$, woraus

$$D = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1,26$$

folgt. Das Ergebnis verdeutlicht: Die Struktur ist „mehr als eine Linie“, füllt den Raum aber nicht wie eine Fläche.

Für natürliche Fraktale ist diese Dimension hingegen keine exakt definierte Größe, da Selbstähnlichkeit nur über einen begrenzten Maßstabbereich auftritt. Hier versteht man die fraktale Dimension als Messgröße, die angibt, wie komplex oder raumfüllend eine Struktur im Mittel ist. Sie beschreibt also nicht eine ideale Eigenschaft, sondern quantifiziert die geometrische Komplexität realer Formen innerhalb eines bestimmten Skalenbereichs.

EXKURS: BOX-COUNTING

Bei natürlichen Strukturen kann man N und r nicht direkt ablesen. Stattdessen nutzt man häufig das Box-Counting-Verfahren:

1. Man überdeckt die Form mit einem Gitter aus gleich großen Quadraten („Boxen“).
2. Man zählt, wie viele Kästchen $N(\epsilon)$ die Struktur berühren.
3. Dann verkleinert man die Kästchen (Kantenlänge ϵ) und zählt erneut.
4. Aus dem Zusammenhang zwischen Kästchengröße und Anzahl ergibt sich näherungsweise:

$$D \approx \frac{\ln(N(\epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}$$

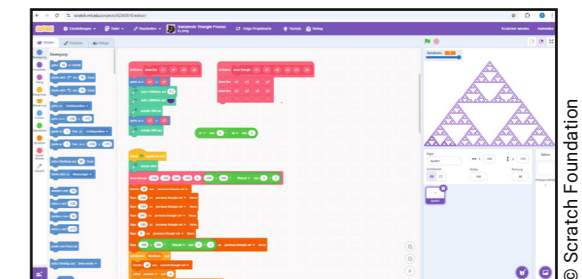
Anschaulich bedeutet das: Je schneller die benötigte Anzahl der Kästchen beim Verkleinern wächst, desto raumfüllender (und damit dimensional „größer“) ist die Struktur.

ALGORITHMISCHER CHARAKTER

Mathematisch lassen sich Fraktale auch als Algorithmen verstehen: Eine klar formulierte Regel wird wiederholt ausgeführt. Damit schlagen Fraktale eine direkte Brücke zur Informatik (Iteration, Rekursion) und zur Modellierung natürlicher Prozesse. Komplexe Formen entstehen nicht durch komplizierte Gleichungen, sondern durch das vielfache Anwenden einfacher Vorschriften.

EXKURS: FRAKTALE PROGRAMMIEREN

Fraktale eignen sich besonders gut, um Programmierkompetenzen zu fördern, da sie auf klaren Algorithmen, Wiederholungen und Regeln (Iteration/Rekursion) basieren. Am Beispiel eines Fraktal-Baums in Scratch sieht man anschaulich, wie durch einfache Befehle und Parameter komplexe Muster entstehen. Lernende trainieren dabei logisches Denken, Problemlösen und den Umgang mit Variablen ganz nebenbei. Geben Sie in Scratch einfach „Fraktal“ oder „fractal“ als Suchbegriff ein und lassen Sie sich inspirieren.



Mit Scratch programmiertes Dreiecksfraktal



ZUM UNTERRICHT

Der Unterrichtsverlauf im Überblick

| | | |
|--|---|---|
| <p>1. STUNDE Einstieg im Plenum 10 Minuten</p> <p>Begriffsklärung und Problemstellung 15 Minuten</p> <p>Übung: Fraktale zeichnen 20 Minuten</p> | <p>Impulsbilder fraktaler Naturformen (Farn, Romanesco, Küste).</p> <p>Leitfragen:</p> <ul style="list-style-type: none"> * Was fällt euch auf? * Wo seht ihr Wiederholung? * Was könnte eine Regel sein? <p>Klärung Begriffe Iteration, exakte und statistische Selbstähnlichkeit, Kochkurve</p> <p>Anfertigen einer eigenen Fraktalzeichnung, Übung zum Sierpinski-Dreieck, Übung zu Selbstähnlichkeit</p> | <p>Folie 1 Beispielbilder</p> <p>AB 1 Fraktale</p> |
| <p>2. STUNDE Einstieg im Plenum 10 Minuten</p> <p>Sachinformation 10 Minuten</p> <p>Übung 20 Minuten</p> <p>Sicherung und Reflexion 5 Minuten</p> | <p>Das Aussehen der und der Aufbau der Koch-Kurve wird wiederholt.</p> <p>Diskussionsfragen im Plenum:</p> <ul style="list-style-type: none"> * Wie lang ist die Linie der Figur? * Wie groß ist die Fläche, die sie einschließt? <p>Betrachten von Küstenlinien auf Google Maps als Beispiele aus der Natur</p> <p>Koch-Kurve als Modell: Pro Schritt werden Strecken ersetzt. Begriffe: Skalierungsfaktor r, Anzahl N.</p> <p>Bearbeitung und Besprechung des Arbeitsblattes</p> <p>Merksatz wird gemeinsam notiert und die Stunde wird reflektiert.</p> | <p>Koch-Kurve</p> <p>→ google.de/maps</p> <p>AB 2 Fraktale mathematisch beschreiben</p> |



ZUM UNTERRICHT

| | | |
|--|--|---|
| <p>3. STUNDE Einstieg im Plenum 10 Minuten</p> <p>Sachinformation 10 Minuten</p> <p>Übung und Sicherung 20 Minuten</p> <p>Reflexion 5 Minuten</p> | <p>Diskussion, ob es sich bei einem Fraktal um eine Linie oder Fläche handelt; dazu verlinkte Animation zeigen</p> <p>Begriff der Dimension wird eingeführt. Formel wird eingeführt und anhand der Kochkurve beispielhaft genutzt.</p> <p>Bearbeitung und Besprechung des Arbeitsblattes</p> <p>gemeinsame Reflexion der Stunde</p> | <p>→ de.wikipedia.org/wiki/Koch-Kurve#/media/Datei:ZoomingpentaKoch.gif</p> <p>AB 3 Die Dimension von Fraktalen</p> |
| <p>4. STUNDE + X Einstieg im Plenum 5 Minuten</p> <p>Projektarbeit 40 + x Minuten</p> | <p>Arbeitsauftrag wird vorgestellt: Die Lernenden erstellen in Gruppen ein Produkt, das einen Überblick über Fraktale bietet. Dabei können sie Schwerpunkt und Medium des Produktes eigenständig wählen.</p> <p>Die Lernenden arbeiten an ihrem Produkt.</p> <p>Beispiele für Schwerpunkte: Anwendungen für Fraktale in der Technik, Fraktale in der Kunst, mathematische Beschreibung der Natur</p> <p>Beispiele für Produkte: Plakat, digitale Übersicht, Video, ...</p> | |



ZUM UNTERRICHT

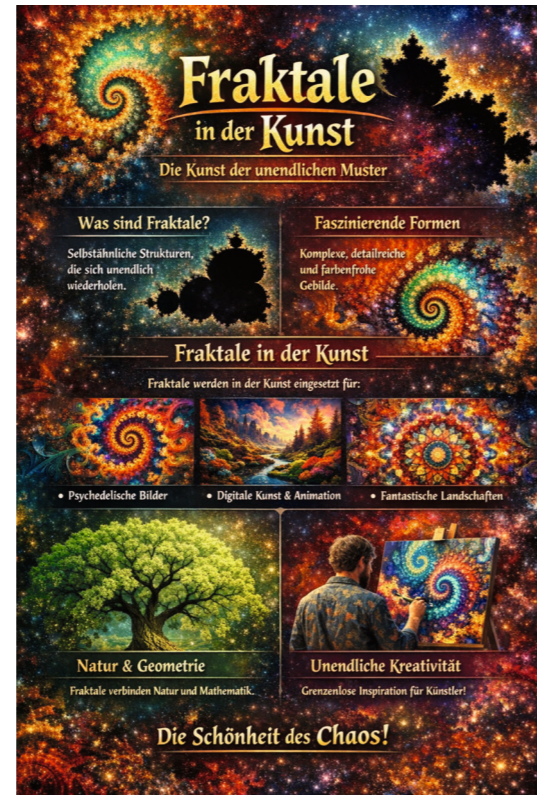
Erläuterungen des Unterrichtsverlaufs

Die Unterrichtseinheit führt die Schüler:innen handlungsorientiert in die fraktale Geometrie ein. Ausgehend von Naturbildern (Farn, Romanesco, Küstenlinien) wird zunächst eine intuitive Wahrnehmung von Selbstähnlichkeit und Wiederholung aufgebaut. Die Lernenden formulieren eigene Vermutungen zu zugrunde liegenden Regeln und nähern sich so entdeckend dem Fraktalbegriff.

Durch das eigenständige Zeichnen von Koch-Kurve, Sierpinski-Dreieck und eines statistisch farnähnlichen Musters erfahren die Schüler:innen unmittelbar, wie aus einfachen Konstruktionsvorschriften durch Iteration komplexe Strukturen entstehen. Dabei wird bewusst zwischen exakter Selbstähnlichkeit mathematischer Fraktale und statistischer Selbstähnlichkeit natürlicher Formen unterschieden.

In der zweiten Stunde wird die Koch-Kurve als Modell genutzt, um Wachstumsprozesse zu untersuchen. Anhand der Übungen auf dem Arbeitsblatt erkennen die Lernenden qualitativ, dass der Umfang unbegrenzt wächst, während die eingeschlossene Fläche endlich bleibt. Diese Grenzphänomene verdeutlichen exemplarisch die Wirkung iterativer Prozesse.

Darauf aufbauend wird in der dritten Stunde der Dimensionsbegriff eingeführt. Die Ähnlichkeitsdimension wird an der Koch-Kurve berechnet und interpretiert, sodass deutlich wird, dass Fraktale Dimensionen zwischen Linie und Fläche besitzen können.



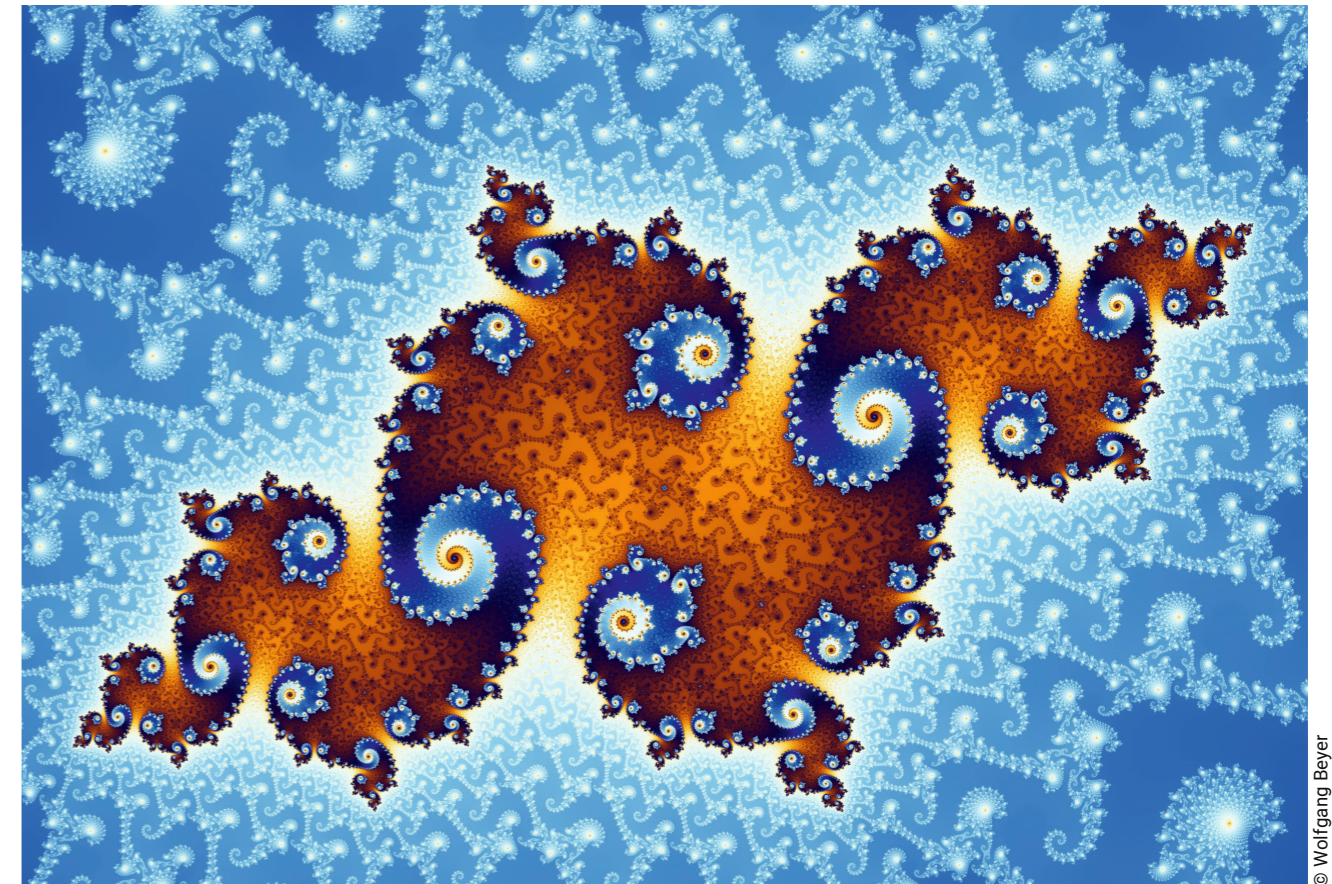
Beispielerggebnis für Projektphase

Die abschließende Projektphase ermöglicht einen vertieften Transfer der Inhalte. In Gruppen erstellen die Lernenden eigenständige Produkte zu Fraktalen in Mathematik, Natur, Technik oder Kunst. Dadurch werden fachliche Erkenntnisse vernetzt, kommunikative Kompetenzen gefördert und individuelle Schwerpunkte ermöglicht.

Insgesamt verbindet die Einheit visuelle Wahrnehmung, handelndes Lernen, mathematische Analyse und kreative Anwendung. Die Schüler:innen erleben Mathematik als Werkzeug zur Beschreibung komplexer natürlicher Strukturen und entwickeln ein grundlegendes Verständnis von Iteration, Selbstähnlichkeit und fraktaler Dimension.

FOLIE 2

Beispielbilder



ARBEITSBLATT 1

Fraktale

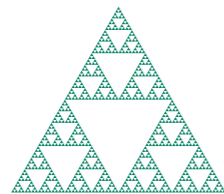
AUFGABE 1

Befolge folgende Anweisungen:

- Teile die unten gezeichnete Linie in drei gleich große Teile.
- Ergänze die mittlere Linie zu einem gleichseitigen Dreieck.
- Wiederhole die Schritte 2 und 3 für jede entstehende Teillinie so lange, wie es dir möglich ist.
- Finalisiere die Zeichnung, indem du die äußerste Linie dunkel nachzeichnest.

AUFGABE 2

Auf der Abbildung siehst du das sogenannte Sierpinski-Dreieck.



© Cäsium137

- Überlege dir, welche Konstruktionsvorschrift dieser Figur zugrunde liegt.

- Wie viele Iterationen wurden in der Abbildung bereits durchgeführt?

AUFGABE 3

- Versuche abzuschätzen, wie viele Skalen der Selbstähnlichkeit du auf den folgenden Bildern zu erkennen kannst.



© Wow_Pho/Pixabay



© Ivar Leifdus



© Ryan McGuire/Pixabay

- Formuliere einen Merksatz für exakte Fraktale.

- Formuliere einen Merksatz für statistische Fraktale.

ARBEITSBLATT 2

Fraktale mathematisch beschreiben

AUFGABE 1

In der Abbildung sind die ersten 3 Iterationsschritte des Sierpinski-Dreiecks dargestellt.



© Timo Münzing/ChatGPT

- Fülle die folgende Tabelle aus.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Iterationsschritt | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | n |
| Anzahl elementarer, aufrecht stehender Dreiecke | 1 | 3 | | | | | | |

- Wie groß ist der Skalierungsfaktor r?

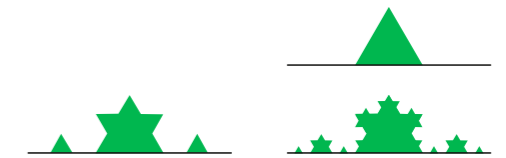
- Beschreibe mit Worten, wie sich jeweils die Gesamtlänge aller Linien und die ausgefüllte Fläche der Figur verändern, wenn man die Figur Schritt für Schritt weiterzeichnet.



© Wow_Pho/Pixabay

AUFGABE 2

In der Abbildung sind die ersten 3 Iterationsschritte der Koch-Kurve dargestellt und es ist jeweils die Fläche markiert, die diese mit der Grundlinie ausfüllt. Gehe davon aus, dass die ursprüngliche Grundlinie genau 27 cm lang war.



© gemeinfrei

- Fülle die folgende Tabelle aus.

| | | | | | | |
|-------------------------|---|---|---|---|---|---|
| Iterationsschritt | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | n |
| Anzahl einzelner Linien | 1 | 4 | | | | |
| Länge der Kochkurve | | | | | | |

- Beschreibe, was jeweils mit der Gesamtlänge aller Linien und der ausgefüllten Fläche der Figur passiert, wenn man die Iterationsschritte durchführt.

AUFGABE 3

Bei Fraktalen in der Natur ist der Skalierungsfaktor nicht so eindeutig festgelegt wie bei mathematischen Konstruktionen. Betrachte dazu das folgende Bild und erkläre, wo die Schwierigkeiten liegen.

Die Dimension von Fraktalen

AUFGABE 1

Erkläre in eigenen Worten, was man unter der Dimension von Fraktalen versteht.

Formel

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln(\frac{1}{r})}$$

Dies ist die Formel für die Dimension bei Fraktalen. Dabei ist N die Anzahl an Kopien pro Iteration und r der Skalierungsfaktor.

AUFGABE 2

Berechne die Dimension des Sierpinski-Dreiecks.

Anzahl Kopien: .

Skalierungsfaktor:

Fraktale Dimension:

Anschauliche Bedeutung:

AUFGABE 3

Die sogenannte Cantor-Menge entsteht durch folgende Konstruktionsregeln:

- * Starte mit einer Strecke.
- * Teile sie in 3 gleiche Teile.
- * Entferne das mittlere Drittel.
- * Wiederhole.

a. Führe die Konstruktion des Fraktals um zwei weitere Iterationsschritte fort.

b. Berechne die Dimension der Cantor-Menge.

Anzahl Kopien: .

Skalierungsfaktor:

Fraktale Dimension:

Anschauliche Bedeutung:

AUFGABE 4 (FÜR SCHNELLE)

Und jetzt sind wir wieder beim Farn angelangt! Recherchiere im Internet, wie man die Dimension bei natürlichen Fraktalen beschreibt (Stichwort: Box-Counting).



© Wow_Photo/Pixabay

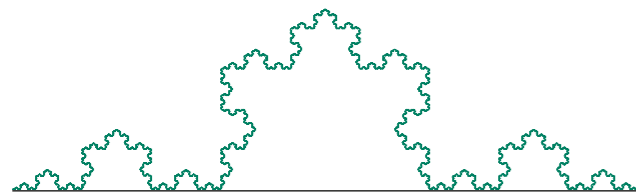
LÖSUNGEN: ARBEITSBLATT 1

Fraktale

AUFGABE 1

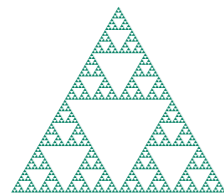
Befolge folgende Anweisungen:

- Teile die unten gezeichnete Linie in drei gleich große Teile.
- Ergänze die mittlere Linie zu einem gleichseitigen Dreieck.
- Wiederhole die Schritte 2 und 3 für jede entstehende Teillinie so lange, wie es dir möglich ist.
- Finalisiere die Zeichnung, indem du die äußerste Linie dunkel nachzeichnest.



AUFGABE 2

Auf der Abbildung siehst du das sogenannte Sierpinski-Dreieck.



© Cäsium137

- Überlege dir, welche Konstruktionsvorschrift dieser Figur zugrunde liegt.

In das Dreieck wird jeweils an den drei Spitzen ein neues, halb so großes Dreieck eingebracht. Dies wird für die neuen Dreiecke wiederholt.

- Wie viele Iterationen wurden in der Abbildung bereits durchgeführt?

6 Iterationen

AUFGABE 3

- Versuche abzuschätzen, wie viele Skalen der Selbstähnlichkeit du auf den folgenden Bildern zu erkennen kannst.



2



3



4-5

Anmerkung für Lehrkraft:

Hier kann diskutiert werden, wie viele Ebenen „erahnt“ werden können. Hier sollte noch mal auf die Bedeutung von statistischen Fraktalen eingegangen werden.

- Formuliere einen Merksatz für exakte Fraktale.

Exakte Fraktale sind mathematische Formen, die sich unendlich oft exakt selbst ähneln – egal, wie weit man hineinzoomt, das Muster bleibt immer gleich.

- Formuliere einen Merksatz für statistische Fraktale.

Statistische Fraktale ähneln sich beim Hineinzoomen nur ungefähr, nicht exakt – die Muster bleiben ähnlich, aber mit kleinen Zufallsabweichungen. Sie kommen häufig in der Natur vor (z. B. Wolken oder Küstenlinien), weil dort Zufall eine Rolle spielt.

LÖSUNGEN: ARBEITSBLATT 2

Fraktale mathematisch beschreiben

AUFGABE 1

In der Abbildung sind die ersten 3 Iterationsschritte des Sierpinski-Dreiecks dargestellt.



- Fülle die folgende Tabelle aus.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|----|----|-----|-----|----------------|
| Iterationsschritt | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | n |
| Anzahl elementarer, aufrecht stehender Dreiecke | 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 3 ⁿ |

- Wie groß ist der Skalierungsfaktor r?

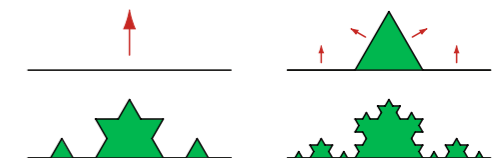
1/2

- Beschreibe mit Worten, wie sich jeweils die Gesamtlänge aller Linien und die ausgefüllte Fläche der Figur verändern, wenn man die Figur Schritt für Schritt weiterzeichnet.

Die Gesamtlänge der Linie wird mit jeder Iteration größer, während die Fläche, die sie einschließen, immer kleiner wird.

AUFGABE 2

In der Abbildung sind die ersten 3 Iterationsschritte der Koch-Kurve dargestellt und es ist jeweils die Fläche markiert, die diese mit der Grundlinie ausfüllt. Gehe davon aus, dass die ursprüngliche Grundlinie genau 27 cm lang war.



- Fülle die folgende Tabelle aus.

| | | | | | | |
|-------------------------|----|----|----|-------|--------|-----------------------|
| Iterationsschritt | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | n |
| Anzahl einzelner Linien | 1 | 4 | 16 | 256 | 4096 | 4 ⁿ |
| Länge der Kochkurve | 27 | 36 | 48 | 85,33 | 151,70 | 27·(4/3) ⁿ |

- Beschreibe, was jeweils mit der Gesamtlänge aller Linien und der ausgefüllten Fläche der Figur passiert, wenn man die Iterationsschritte durchführt.

Die Länge der Kurve wird immer größer und kann theoretisch beliebig groß werden. Die Fläche hingegen ist beschränkt.

AUFGABE 3

Bei Fraktalen in der Natur ist der Skalierungsfaktor nicht so eindeutig festgelegt wie bei mathematischen Konstruktionen. Betrachte dazu das folgende Bild und erkläre, wo die Schwierigkeiten liegen.

Bei realen Gebilden spielt der Zufall eine Rolle. Sie wachsen nicht exakt gleich und nach exakten mathematischen Regeln. Damit ist es auch schwer, mathematische Werte einfach abzulesen.



© Wow_Photo/Pixabay

LÖSUNGEN: ARBEITSBLATT 3

Die Dimension von Fraktalen

AUFGABE 1

Erkläre in eigenen Worten, was man unter der Dimension von Fraktalen versteht.

Die Dimension eines Fraktals beschreibt, wie „raumfüllend“ eine Figur ist – also ob sie sich eher wie eine Linie (Dimension 1), eine Fläche (Dimension 2) oder etwas dazwischen verhält. Bei Fraktalen ist diese Zahl oft keine ganze Zahl (z. B. 1,26), was zeigt: Sie sind komplizierter als normale Linien, aber füllen die Fläche trotzdem nicht vollständig aus.

Formel

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln(\frac{1}{r})}$$

Dies ist die Formel für die Dimension bei Fraktalen. Dabei ist N die Anzahl an Kopien pro Iteration und r der Skalierungsfaktor.

AUFGABE 2

Berechne die Dimension des Sierpinski-Dreiecks.

Anzahl Kopien: .

3

Skalierungsfaktor:

$\frac{1}{2}$

Fraktale Dimension:

$$D = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} = 1,585$$

Anschauliche Bedeutung:

Die Figur ist „mehr als eine Linie“ (Dimension 1), aber „weniger als eine Fläche“ (Dimension 2) – sie füllt den Raum nur teilweise aus.

LÖSUNGEN: ARBEITSBLATT 3

AUFGABE 3

Die sogenannte Cantor-Menge entsteht durch folgende Konstruktionsregeln:

- * Starte mit einer Strecke.
- * Teile sie in 3 gleiche Teile.
- * Entferne das mittlere Drittel.
- * Wiederhole.

a. Führe die Konstruktion des Fraktals um zwei weitere Iterationsschritte fort.

b. Berechne die Dimension der Cantor-Menge.

Anzahl Kopien: .

2

Skalierungsfaktor:

$\frac{1}{3}$

Fraktale Dimension:

$$D = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = 0,631$$

Anschauliche Bedeutung:

Die Cantor-Menge ist „weniger als eine Linie“ (Dimension 1) – sie besteht aus unendlich vielen Punkten, füllt aber den Raum fast gar nicht aus.

AUFGABE 4 (FÜR SCHNELLE)

Und jetzt sind wir wieder beim Farn angelangt! Recherchiere im Internet, wie man die Dimension bei natürlichen Fraktalen beschreibt (Stichwort: Box-Counting).



© Wow_Photo/Pixabay



AUTORIN

Sabrina Schifrer

Sabrina Schifrer ist soziale Unternehmerin und realisiert seit 2009 regionale Projekte an den Schnittstellen Schule, Unternehmen und wissenschaftliche Partner. Ihr Ziel ist es, unterschiedliche Perspektiven einzunehmen, voneinander zu lernen und Brücken zu bauen. Die Projekte nehmen sich immer nachhaltiger und zukunftsfähiger Themen an und werden über den Wunderwelten-Verein umgesetzt. Als Präsidentin geht es ihr darum, jungen Menschen eine Plattform zu bieten, damit sie ihre Talente leben können, und so zu einer Gesellschaft zu kommen, die ihr volles Potenzial entwickeln kann.

Als gefragte Speakerin im In- und Ausland erlebt sie immer wieder die Diskrepanz zwischen unterschiedlichen Lebenswelten, die sie inspiriert, als Übersetzerin der Wissensgebiete und für eine Verständigung der Kulturen und Menschen einzutreten. Sie hat jahrelang internationale Projekte konzipiert und durchgeführt, und für sie ist die Rückbesinnung auf die Natur ein Phänomen, von dem alle Teilnehmenden am meisten lernen können. Deshalb betreibt sie seit 2024 einen natur-

„Innovation entsteht aus dem In-
Beziehung-Gehen mit dem
Unbekannten. Solche Freiräume
sollten wir uns schaffen.“

nahen Wunderwelten-Space im Süden Österreichs und hilft anderen Menschen über Kunst und Naturerfahrung, Ruhe und Entspannung zu finden. Die andere Dimension ist die Innovation und der ständige Drang, Neues zu erforschen: Auch hier ist Sabrina Schifrer in den Bereichen Bionik, Myzelstruktur, Frequenz und neue Formen von Wissensvermittlung aktiv.

LINKTIPP

Wunderwelten:
→ www.wunderwelten.jetzt



1. Auflage Februar 2026

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Fotomechanische oder andere Wiedergabeverfahren nur mit Genehmigung des Verlages.

Auf verschiedenen Seiten dieses Heftes befinden sich Verweise (Links) auf Internetadressen. Haftungsnotiz: Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle wird die Haftung für die Inhalte der externen Seiten ausgeschlossen. Für den Inhalt dieser externen Seiten sind ausschließlich die Betreiber verantwortlich. Sollten Sie daher auf kostenpflichtige, illegale oder anstößige Seiten treffen, so bedauern wir dies ausdrücklich und bitten Sie, uns umgehend per E-Mail (t.zunder@klett-mex.de) davon in Kenntnis zu setzen, damit bei einem Nachdruck der Nachweis gelöscht wird.

Redaktion: Silke Panten, Berlin
Projektkoordination: Jörg Schmidt, Tanja Zunder,
Klett MEX GmbH
Satz: Bregulla, Aachen

Eine Zusammenarbeit des Vereins „Friendship with Nature e. V.“ und der Klett MINT GmbH
© Friendship with Nature e. V., Weiz, und Klett MINT GmbH, Stuttgart

Gefördert durch die Software AG – Stiftung